

# Apostila: Teoria dos Jogos e Equilíbrio de Nash

## Apostila: Teoria dos Jogos e Equilíbrio de Nash

### 1. Introdução à Teoria dos Jogos

### 2. Elementos Básicos de um Jogo

### 3. Tipos de Jogos

#### 3.1 Jogos Simultâneos vs. Jogos Sequenciais

#### 3.2 Jogos de Soma Zero e Soma Não Zero

#### 3.3 Jogos de Informação Completa vs. Incompleta

### 4. Estratégias em Jogos

#### 4.1 Estratégia Pura

#### 4.2 Estratégia Mista

### 5. Equilíbrio de Nash

#### 5.1 Definição

#### 5.2 Existência do Equilíbrio

#### 5.3 Importância

### 6. Exemplos Clássicos de Jogos e Equilíbrio

#### 6.1 Dilema do Prisioneiro

#### 6.2 Jogo do Galo (Tic-Tac-Toe)

#### 6.3 Jogo do Bem-Estar Social

### 7. Extensões e Aplicações

#### 7.1 Jogos Repetidos

#### 7.2 Jogos Evolutivos

#### 7.3 Aplicações Econômicas

### 8. Exercícios

### 9. Referências e Leituras Recomendadas

## Exemplos Resolvidos Detalhados

### ✓ Exemplo 1: Dilema do Prisioneiro

Situação:

Objetivo:

Passos:

### ✓ Exemplo 2: Jogo da Coordenação (Batalha dos Sexos)

Situação:

### Solução:

#### ✓ Exemplo 3: Pedra, Papel, Tesoura

#### Matriz Simplificada:

#### 💡 Exercícios Comentados

 [Exercício 1](#)

 [Exercício 2](#)

 [Exercício 3](#)

## 1. Introdução à Teoria dos Jogos

A **Teoria dos Jogos** é um ramo da matemática aplicada que estuda situações de conflito e cooperação entre agentes racionais, chamados jogadores. Seu objetivo principal é analisar como esses jogadores tomam decisões estratégicas que levam em conta as escolhas dos demais.

#### **História e contexto:**

- Formalizada por John von Neumann e Oskar Morgenstern em 1944.
- Amplamente aplicada em economia, ciência política, biologia, informática e outras áreas.

## 2. Elementos Básicos de um Jogo

Um jogo em teoria dos jogos é definido por:

- **Jogadores:** Os tomadores de decisão.
- **Estratégias:** Conjunto de ações possíveis para cada jogador.
- **Payoffs (Recompensas):** Ganhos ou perdas de cada jogador dependendo das estratégias escolhidas por todos.
- **Informação:** O que os jogadores sabem sobre as escolhas dos outros e o jogo em si.

## 3. Tipos de Jogos

### 3.1 Jogos Simultâneos vs. Jogos Sequenciais

- **Simultâneos:** Jogadores escolhem estratégias ao mesmo tempo, sem conhecer a decisão do outro (ex: dilema do prisioneiro).

- **Sequenciais:** Jogadores escolhem em ordem, sabendo as decisões anteriores (ex: jogo da árvore).

### 3.2 Jogos de Soma Zero e Soma Não Zero

- **Soma Zero:** O ganho de um é exatamente a perda do outro (ex: jogo de xadrez).
- **Soma Não Zero:** Pode haver ganhos ou perdas para ambos (cooperação possível).

### 3.3 Jogos de Informação Completa vs. Incompleta

- **Completa:** Todos sabem tudo sobre o jogo.
- **Incompleta:** Informação parcial (ex: poker).

## 4. Estratégias em Jogos

### 4.1 Estratégia Pura

Escolher uma única ação com certeza.

### 4.2 Estratégia Mista

Escolher ações com certa probabilidade.

## 5. Equilíbrio de Nash

### 5.1 Definição

Um **Equilíbrio de Nash** ocorre quando nenhum jogador pode melhorar seu payoff mudando unilateralmente sua estratégia, dado que os outros mantêm as suas.

Formalmente: Uma estratégia perfil  $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$  é equilíbrio se para todo jogador  $i$ :

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \in \{s_i^*\} \quad \text{e} \quad u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \in \{s_i^*\}$$

onde  $u_i$  é o payoff do jogador  $i$ , e  $s_{-i}^*$  são as estratégias dos outros jogadores.

### 5.2 Existência do Equilíbrio

- Teorema de Nash (1950) garante que todo jogo finito tem pelo menos um equilíbrio em estratégias mistas.

### 5.3 Importância

- Estabilidade estratégica: ninguém tem incentivo para desviar.
- Base para previsão de comportamento racional.

## **6. Exemplos Clássicos de Jogos e Equilíbrio**

### **6.1 Dilema do Prisioneiro**

- Dois prisioneiros decidem confessar ou não.
- Equilíbrio: ambos confessam (não cooperaram), mesmo que cooperar seja melhor para ambos.

### **6.2 Jogo do Galo (Tic-Tac-Toe)**

- Equilíbrio em estratégias puras leva a empate perfeito.

### **6.3 Jogo do Bem-Estar Social**

- Decisões que afetam grupo e escolhas individuais.

## **7. Extensões e Aplicações**

### **7.1 Jogos Repetidos**

- Jogadores interagem várias vezes.
- Estratégias condicionais podem sustentar cooperação.

### **7.2 Jogos Evolutivos**

- Estratégias se adaptam ao longo do tempo, influenciadas pela seleção natural.

### **7.3 Aplicações Econômicas**

- Leilões, oligopólios, negociação.

## **8. Exercícios**

1. Explique a diferença entre estratégia pura e estratégia mista.
2. Determine o equilíbrio de Nash no dilema do prisioneiro.
3. Dê um exemplo de jogo de soma zero e encontre o equilíbrio.
4. Discuta como o equilíbrio de Nash pode não ser eficiente socialmente.

## **9. Referências e Leituras Recomendadas**

- Osborne, M. J. (2004). *An Introduction to Game Theory*.
- Myerson, R. B. (1991). *Game Theory: Analysis of Conflict*.
- Dixit, A., Skeath, S., & Reiley, D. (2015). *Games of Strategy*.

# Exemplos Resolvidos Detalhados

## ✓ Exemplo 1: Dilema do Prisioneiro

### Situação:

Dois prisioneiros são interrogados separadamente. Cada um pode **confessar (C)** ou **ficar em silêncio (S)**.

		Prisioneiro B: C	Prisioneiro B: S
Prisioneiro A: C	-5, -5	0, -10	
Prisioneiro A: S	-10, 0	-1, -1	

### Objetivo:

Encontrar o **Equilíbrio de Nash**.

### Passos:

#### 1. Para o Prisioneiro A:

- Se B escolher C, A prefere C (pois  $-5 > -10$ ).
- Se B escolher S, A prefere C (pois  $0 > -1$ ).

✓ A sempre escolhe C (confessar).

#### 1. Para o Prisioneiro B:

- Se A escolher C, B prefere C (pois  $-5 > -10$ ).
- Se A escolher S, B prefere C (pois  $0 > -1$ ).

✓ B também sempre escolhe C (confessar).

✉ Equilíbrio de Nash: (C, C) com resultado (-5, -5).

**Comentário:** Ambos agem racionalmente, mas o resultado é pior do que se tivessem cooperado.

## ✓ Exemplo 2: Jogo da Coordenação (Batalha dos Sexos)

### Situação:

Dois jogadores, Ana e Bruno, querem se encontrar. Ana prefere ir à **ópera (O)** e Bruno ao **futebol (F)**, mas ambos preferem estar juntos do que separados.

Bruno: Ópera      Bruno: Futebol

	(O)	(F)
Ana:	2, 1	0, 0
O		
Ana: F	0, 0	1, 2
F		

### Solução:

1. Avaliando as **melhores respostas**:

- Se Bruno vai à Ópera, Ana prefere ir à Ópera ( $2 > 0$ ).
- Se Bruno vai ao Futebol, Ana prefere Futebol ( $1 > 0$ ).
- Se Ana vai à Ópera, Bruno prefere Ópera ( $1 > 0$ ).
- Se Ana vai ao Futebol, Bruno prefere Futebol ( $2 > 0$ ).

### ✓ Equilíbrios de Nash puros:

- (Ópera, Ópera)
- (Futebol, Futebol)

1. **Equilíbrio Misto** (menos comum neste tipo de jogo, mas existe):

- Cada jogador aleatoriza sua escolha com certas probabilidades. Exemplo: Ana escolhe Ópera com prob.  $p_p$ , Bruno escolhe Ópera com prob.  $q_q$ .

(Cálculo omitido aqui por simplicidade, mas pode ser incluído se quiser).

## ✓ Exemplo 3: Pedra, Papel, Tesoura

### Matriz Simplificada:

#### Papel Pedra Tesoura

Papel 0,0 1,-1 -1,1

Pedra -1,1 0,0 1,-1

Tesoura 1,-1 -1,1 0,0

Não há **equilíbrio puro**, pois qualquer escolha pode ser vencida pela outra.

### ✓ Equilíbrio Misto:

- Cada jogador escolhe cada opção com probabilidade  $\frac{1}{3}$ .

## 💡 Exercícios Comentados

### 📘 Exercício 1

#### Enunciado:

Dois concorrentes (A e B) podem entrar ou não em um novo mercado. Se ambos entrarem, os lucros serão baixos. Se apenas um entrar, ele terá grande lucro. Se nenhum entrar, lucro zero.

**B:**      **B: Não**

	Entrar	Entrar
A: Entrar	2, 2	10, 0
A: Não Entrar	0, 10	0, 0

**Pergunta:** Qual(is) o(s) equilíbrio(s) de Nash?

**Resolução:**

- Se B **entra**, A prefere **não entrar** ( $0 < 2$ ) → Falso. A prefere entrar.
- Se B **não entra**, A prefere **entrar** ( $10 > 0$ ).
- Para B, mesma lógica: ele prefere entrar se A não entra, mas não se A entra.

✓ Existem **dois equilíbrios puros**:

- (Entrar, Não Entrar)
- (Não Entrar, Entrar)

Também existe um equilíbrio misto (cálculo opcional).

## Exercício 2

**Enunciado:**

Mostre que no jogo Pedra-Papel-Tesoura o equilíbrio é místico e simétrico.

**Comentário:**

Já resolvido acima — como o jogo é simétrico e cíclico, a única forma de não dar vantagem ao adversário é aleatorizar igualmente as escolhas.

✓ **Resposta:** Estratégia mista com probabilidades iguais de  $\frac{1}{3}$  para cada ação.

## Exercício 3

**Enunciado:**

Explique por que nem todo Equilíbrio de Nash leva ao melhor resultado para todos os jogadores.

**Comentário:**

Basta citar o Dilema do Prisioneiro: o equilíbrio (confessar, confessar) é racional, mas leva a uma punição maior do que (ficar em silêncio, ficar em silêncio), que não é equilíbrio.

✓ **Conclusão:** O equilíbrio de Nash é estável, mas pode não ser eficiente (ótimo de Pareto).