

Apostila: Teoria dos Jogos e Equilíbrio de Nash

Apostila: Teoria dos Jogos e Equilíbrio de Nash

1. Introdução à Teoria dos Jogos

2. Elementos Básicos de um Jogo

3. Tipos de Jogos

3.1 Jogos Simultâneos vs. Jogos Sequenciais

3.2 Jogos de Soma Zero e Soma Não Zero

3.3 Jogos de Informação Completa vs. Incompleta

4. Estratégias em Jogos

4.1 Estratégia Pura

4.2 Estratégia Mista

5. Equilíbrio de Nash

5.1 Definição

5.2 Existência do Equilíbrio

5.3 Importância

6. Exemplos Clássicos de Jogos e Equilíbrio

6.1 Dilema do Prisioneiro

6.2 Jogo do Galo (Tic-Tac-Toe)

6.3 Jogo do Bem-Estar Social

7. Extensões e Aplicações

7.1 Jogos Repetidos

7.2 Jogos Evolutivos

7.3 Aplicações Econômicas

8. Exercícios

9. Referências e Leituras Recomendadas

Exemplos Resolvidos Detalhados

✓ Exemplo 1: Dilema do Prisioneiro

Situação:

Objetivo:

Passos:

✓ Exemplo 2: Jogo da Coordenação (Batalha dos Sexos)

Situação:

[Solução:](#)

[✓ Exemplo 3: Pedra, Papel, Tesoura](#)

[Matriz Simplificada:](#)

 [Exercícios Comentados](#)

 [Exercício 1](#)

 [Exercício 2](#)

 [Exercício 3](#)

1. Introdução à Teoria dos Jogos

A **Teoria dos Jogos** é um ramo da matemática aplicada que estuda situações de conflito e cooperação entre agentes racionais, chamados jogadores. Seu objetivo principal é analisar como esses jogadores tomam decisões estratégicas que levam em conta as escolhas dos demais.

História e contexto:

- Formalizada por John von Neumann e Oskar Morgenstern em 1944.
- Amplamente aplicada em economia, ciência política, biologia, informática e outras áreas.

2. Elementos Básicos de um Jogo

Um jogo em teoria dos jogos é definido por:

- **Jogadores:** Os tomadores de decisão.
- **Estratégias:** Conjunto de ações possíveis para cada jogador.
- **Payoffs (Recompensas):** Ganhos ou perdas de cada jogador dependendo das estratégias escolhidas por todos.
- **Informação:** O que os jogadores sabem sobre as escolhas dos outros e o jogo em si.

3. Tipos de Jogos

3.1 Jogos Simultâneos vs. Jogos Sequenciais

- **Simultâneos:** Jogadores escolhem estratégias ao mesmo tempo, sem conhecer a decisão do outro (ex: dilema do prisioneiro).

- **Sequenciais:** Jogadores escolhem em ordem, sabendo as decisões anteriores (ex: jogo da árvore).

3.2 Jogos de Soma Zero e Soma Não Zero

- **Soma Zero:** O ganho de um é exatamente a perda do outro (ex: jogo de xadrez).
- **Soma Não Zero:** Pode haver ganhos ou perdas para ambos (cooperação possível).

3.3 Jogos de Informação Completa vs. Incompleta

- **Completa:** Todos sabem tudo sobre o jogo.
- **Incompleta:** Informação parcial (ex: poker).

4. Estratégias em Jogos

4.1 Estratégia Pura

Escolher uma única ação com certeza.

4.2 Estratégia Mista

Escolher ações com certa probabilidade.

5. Equilíbrio de Nash

5.1 Definição

Um **Equilíbrio de Nash** ocorre quando nenhum jogador pode melhorar seu payoff mudando unilateralmente sua estratégia, dado que os outros mantêm as suas.

Formalmente: Uma estratégia perfil $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ é equilíbrio se para todo jogador i :

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \quad \text{for all } s_i$$

onde u_i é o payoff do jogador i , e s_{-i}^* são as estratégias dos outros jogadores.

5.2 Existência do Equilíbrio

- Teorema de Nash (1950) garante que todo jogo finito tem pelo menos um equilíbrio em estratégias mistas.

5.3 Importância

- Estabilidade estratégica: ninguém tem incentivo para desviar.
- Base para previsão de comportamento racional.

6. Exemplos Clássicos de Jogos e Equilíbrio

6.1 Dilema do Prisioneiro

- Dois prisioneiros decidem confessar ou não.
- Equilíbrio: ambos confessam (não cooperam), mesmo que cooperar seja melhor para ambos.

6.2 Jogo do Galo (Tic-Tac-Toe)

- Equilíbrio em estratégias puras leva a empate perfeito.

6.3 Jogo do Bem-Estar Social

- Decisões que afetam grupo e escolhas individuais.

7. Extensões e Aplicações

7.1 Jogos Repetidos

- Jogadores interagem várias vezes.
- Estratégias condicionais podem sustentar cooperação.

7.2 Jogos Evolutivos

- Estratégias se adaptam ao longo do tempo, influenciadas pela seleção natural.

7.3 Aplicações Econômicas

- Leilões, oligopólios, negociação.

8. Exercícios

1. Explique a diferença entre estratégia pura e estratégia mista.
2. Determine o equilíbrio de Nash no dilema do prisioneiro.
3. Dê um exemplo de jogo de soma zero e encontre o equilíbrio.
4. Discuta como o equilíbrio de Nash pode não ser eficiente socialmente.

9. Referências e Leituras Recomendadas

- Osborne, M. J. (2004). *An Introduction to Game Theory*.
- Myerson, R. B. (1991). *Game Theory: Analysis of Conflict*.
- Dixit, A., Skeath, S., & Reiley, D. (2015). *Games of Strategy*.

Exemplos Resolvidos Detalhados

✓ Exemplo 1: Dilema do Prisioneiro

Situação:

Dois prisioneiros são interrogados separadamente. Cada um pode **confessar (C)** ou **ficar em silêncio (S)**.

	Prisioneiro B: C	Prisioneiro B: S
Prisioneiro A: C	-5, -5	0, -10
Prisioneiro A: S	-10, 0	-1, -1

Objetivo:

Encontrar o **Equilíbrio de Nash**.

Passos:

1. Para o Prisioneiro A:

- Se B escolher C, A prefere C (pois $-5 > -10$).
- Se B escolher S, A prefere C (pois $0 > -1$).

✓ A sempre escolhe C (confessar).

1. Para o Prisioneiro B:

- Se A escolher C, B prefere C (pois $-5 > -10$).
- Se A escolher S, B prefere C (pois $0 > -1$).

✓ B também sempre escolhe C (confessar).

 **Equilíbrio de Nash:** (C, C) com resultado (-5, -5).

Comentário: Ambos agem racionalmente, mas o resultado é pior do que se tivessem cooperado.

✓ Exemplo 2: Jogo da Coordenação (Batalha dos Sexos)

Situação:

Dois jogadores, Ana e Bruno, querem se encontrar. Ana prefere ir à **ópera (O)** e Bruno ao **futebol (F)**, mas ambos preferem estar juntos do que separados.

Bruno: Ópera Bruno: Futebol

	(O)	(F)
Ana: O	2, 1	0, 0
Ana: F	0, 0	1, 2

Solução:

- Avaliando as **melhores respostas**:
 - Se Bruno vai à Ópera, Ana prefere ir à Ópera ($2 > 0$).
 - Se Bruno vai ao Futebol, Ana prefere Futebol ($1 > 0$).
 - Se Ana vai à Ópera, Bruno prefere Ópera ($1 > 0$).
 - Se Ana vai ao Futebol, Bruno prefere Futebol ($2 > 0$).

✓ Equilíbrios de Nash puros:

- (Ópera, Ópera)
 - (Futebol, Futebol)
- Equilíbrio Misto** (menos comum neste tipo de jogo, mas existe):
 - Cada jogador aleatoriza sua escolha com certas probabilidades. Exemplo: Ana escolhe Ópera com prob. pp , Bruno escolhe Ópera com prob. qq .

(Cálculo omitido aqui por simplicidade, mas pode ser incluído se quiser).

✓ Exemplo 3: Pedra, Papel, Tesoura

Matriz Simplificada:

	Papel	Pedra	Tesoura
Papel	0,0	1,-1	-1,1
Pedra	-1,1	0,0	1,-1
Tesoura	1,-1	-1,1	0,0

Não há **equilíbrio puro**, pois qualquer escolha pode ser vencida pela outra.

✓ Equilíbrio Misto:

- Cada jogador escolhe cada opção com probabilidade $\frac{1}{3}$.



Exercícios Comentados



Exercício 1

Enunciado:

Dois concorrentes (A e B) podem entrar ou não em um novo mercado. Se ambos entrarem, os lucros serão baixos. Se apenas um entrar, ele terá grande lucro. Se nenhum entrar, lucro zero.

B: B: Não

	Entrar	Entrar
A: Entrar	2, 2	10, 0
A: Não Entrar	0, 10	0, 0

Pergunta: Qual(is) o(s) equilíbrio(s) de Nash?

Resolução:

- Se B **entra**, A prefere **não entrar** ($0 < 2$) \rightarrow Falso. A prefere entrar.
- Se B **não entra**, A prefere **entrar** ($10 > 0$).
- Para B, mesma lógica: ele prefere entrar se A não entra, mas não se A entra.

✓ Existem **dois equilíbrios puros**:

- (Entrar, Não Entrar)
- (Não Entrar, Entrar)

Também existe um equilíbrio misto (cálculo opcional).

Exercício 2

Enunciado:

Mostre que no jogo Pedra-Papel-Tesoura o equilíbrio é místico e simétrico.

Comentário:

Já resolvido acima — como o jogo é simétrico e cíclico, a única forma de não dar vantagem ao adversário é aleatorizar igualmente as escolhas.

✓ **Resposta:** Estratégia mista com probabilidades iguais de $\frac{1}{3}$ para cada ação.

Exercício 3

Enunciado:

Explique por que nem todo Equilíbrio de Nash leva ao melhor resultado para todos os jogadores.

Comentário:

Basta citar o Dilema do Prisioneiro: o equilíbrio (confessar, confessar) é racional, mas leva a uma punição maior do que (ficar em silêncio, ficar em silêncio), que não é equilíbrio.

✓ **Conclusão:** O equilíbrio de Nash é estável, mas pode não ser eficiente (ótimo de Pareto).